

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

Тема: Логические операции над предикатами. Построение отрицаний к предикатам, содержащим кванторные операции.

Цель: научиться выполнять операции над предикатами. научиться навешивать кванторы на предикаты и определять логические значения этих высказываний

Общие теоретические положения

1 Предикатом называется предложение, содержащее одну или несколько переменных, при подстановке в которые конкретных значений, предложение обращается в высказывание. В предикатах переменные могут присутствовать явно или неявно, т.е. подразумеваться по смыслу.

2 Областью определения предиката называется множество, элементы которого могут быть подставлены в предикат.

3 Множеством истинности предиката вызывается множество, элементы которого подставленные в предикат, обращают его в истинное высказывание.

4 Предикаты могут быть простыми и составными. Составные предикаты образуются из простых предикатов с помощью логических связок по правилам алгебры логики.

5 Из двух предикатов можно образовать новый предикат, который часто называется высказывательной формой.

6 Одноместный предикат принято называть свойством (предикат – свойство).

7 Двуместный, трехместный, ... , n-местный предикат называют отношением (предикат – отношение)

8 Нульместный предикат называется высказыванием.

9 Тождественно – истинным называется предикат, который принимает истинное значение на всей области определения (множество истинности совпадает с областью определения)

10 Тождественно – ложным называется предикат, который принимает ложное значение на всей области определения (множество истинности пустое).

11 Пусть даны два предиката, определенные на одном множестве. Высказывательные формы Q и G назовем равносильными, если при любом наборе значений переменных, входящих в них, высказывательные формы принимают одинаковые значения истинности

12 Отношение равносильности высказывательных форм рефлексивно и симметрично.

13 Квантор — общее название для логических операций, ограничивающих область истинности какого-либо предиката и создающих высказывание

14 Различают два вида кванторов: квантор общности и квантор существования

15 *Квантор общности* – соответствует словам: *любой, всякий, каждый* и иными словам такого смысла. Обозначается символом $\forall$

16 Квантор существования - соответствует словам: *существует, найдется, хотя бы один* и иными словам такого смысла. Обозначается символом $\exists$

Примеры:

1. На множестве $M = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ заданы предикаты $P(x)$: « x – простое число», $Q(x)$: « x – нечетное число». Составить таблицы истинности. Равносильны ли предикаты на множестве а) M ; б) $L = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; в) $K = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

Составим таблицы истинности предикатов на данных множествах:

M	P(x)	Q(x)	L	P(x)	Q(x)	K	P(x)	Q(x)
3	1	1	2	1	0	3	1	1
4	0	0	3	1	1	4	0	0
5	1	1	4	0	0	5	1	1
6	0	0	5	1	1	6	0	0

7	1	1	6	0	0	7	1	1
8	0	0	7	1	1	8	0	0
			8	0	0	9	0	1

На множестве M $I_P = I_Q$, следовательно на этом множестве предикаты равносильны. На множествах L и K условие равносильности не соблюдается.

2. На множестве $M = \{1,2,3,4,\dots,20\}$ заданы предикаты :

$A(x)$: « x не делится на 5», $B(x)$: « x - простое число», $C(x)$: « x кратно 3». Найти множество истинности предиката: $A(x)B(x) \rightarrow \bar{C}(x)$.

Найдем области истинности предикатов $A(x)$, $B(x)$ и $\bar{C}(x)$ - « x не кратно 3»:

$I_A = \{1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,14,16,17,18,19\}$;

$I_B = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$;

$CI_C = \{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,20\}$.

В предикате заменим импликацию : $\overline{A(x)B(x)} \vee \bar{C}(x)$.

Предикату соответствует формула алгебры множеств: $C(I_A \cap I_B) \cup CI_C$.

$I_A \cap I_B = \{2,3,7,11,13,17,19\}$;

$C(I_A \cap I_B) = \{1,4,5,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20\}$;

$C(I_A \cap I_B) \cup CI_C = \{1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$.

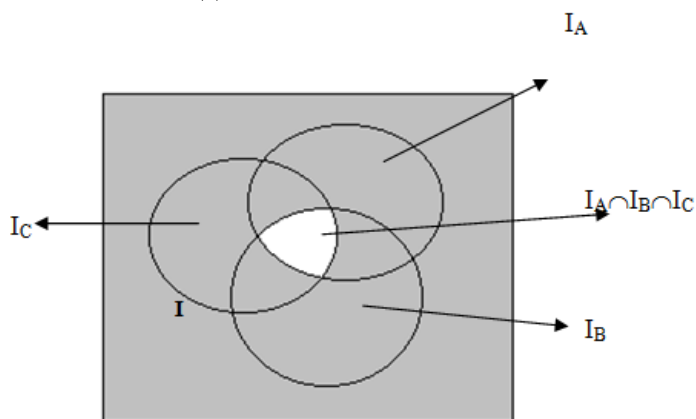
2.Изобразить на диаграмме Эйлера – Венна область истинности предиката: а) $A(x)B(x) \rightarrow \bar{D}(x)$.

Сначала выполним преобразования, рассматривая предикат как высказывание:

$$A(x)B(x) \rightarrow \bar{D}(x) \equiv \overline{A(x)C(x)} \vee \bar{D}(x) \equiv \overline{A(x)B(x)D(x)}.$$

Предикату соответствует область истинности, определяемая формулой алгебры множеств:

$C(I_A \cap I_B \cap I_C)$. Диаграмма имеет вид:



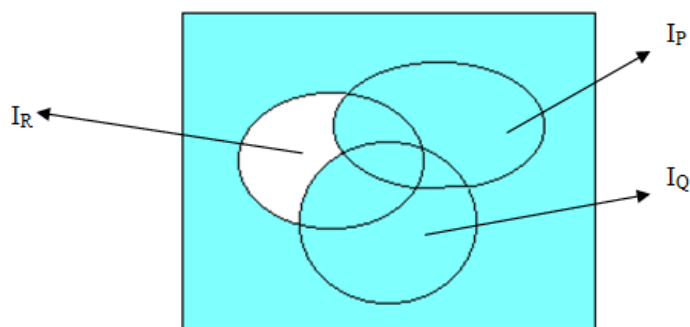
Область истинности предиката окрашена серым цветом.

$$(P(x) \rightarrow Q(x)) \vee R(x)\bar{Q}(x).$$

Выполним преобразования:

$$(P(x) \rightarrow Q(x)) \vee R(x)\bar{Q}(x) \equiv \bar{P}(x) \vee Q(x) \vee R(x)\bar{Q}(x).$$

Предикату соответствует область истинности, определяемая формулой алгебры множеств: $CI_P \cup I_Q \cup I_R \cap CI_Q = (CI_P \cup I_Q \cup I_R) \cap (CI_P \cup I_Q \cup CI_Q) = (CI_P \cup I_Q \cup I_R) \cap U =$

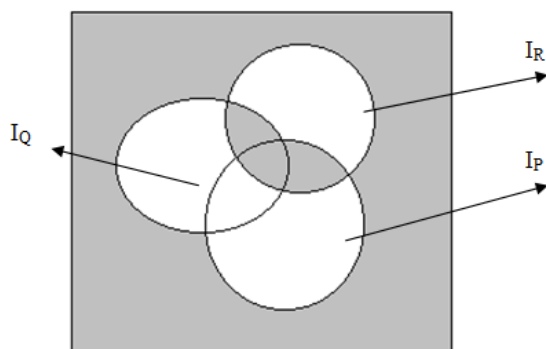


$CI_P \cup I_Q \cup I_R.$

Соответствующая диаграмма:

Область истинности предиката окрашена.

3. Записать предикат, полученный в результате логических операций над предикатами $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, области истинности которых заштрихованы:



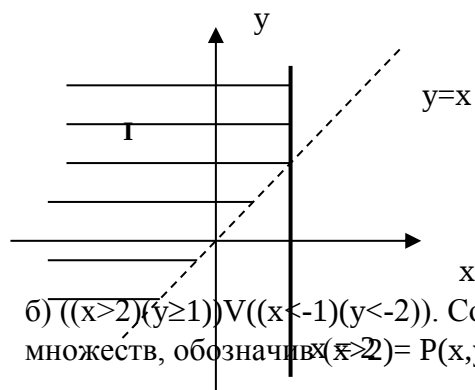
Так как область истинности $I = C(I_P \cup I_Q \cup I_R) \cup I_Q \cap I_R \cup I_R \cap I_P$, то предикат имеет вид $\overline{P(x) \vee Q(x) \vee R(x)} \vee Q(x)R(x) \vee R(x)P(x) \equiv (P(x) \vee Q(x) \vee R(x)) \rightarrow R(x)(Q(x) \vee P(x)).$

4. Изобразить на координатной плоскости область истинности предиката

a) $x > 2 \wedge (x < y).$

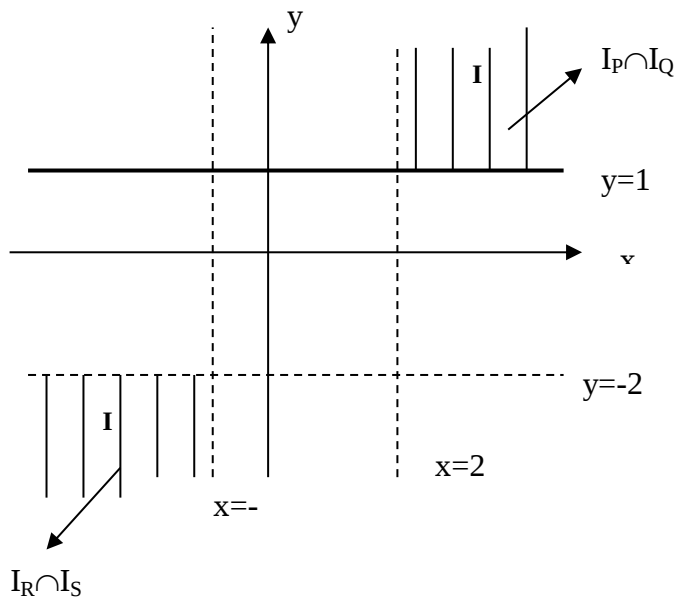
Выполним преобразования: $\overline{x > 2} \wedge (x < y) \equiv (x \leq 2) \wedge (x < y).$

Область истинности предиката $x \leq 2$ - часть плоскости, расположенная левее прямой $x = 2$ и все точки этой прямой (изобразим ее сплошной линией). Область истинности предиката $x < y$ - часть плоскости, расположенная выше прямой $y = x$ без этой прямой (изобразим ее пунктирной линией). Область истинности данного предиката - пересечение описанных областей истинности:



б) $\overline{((x > 2)(y \geq 1)) \vee ((x < -1)(y < -2))}$. Составим соответствующую формулу алгебры множеств, обозначив $(x > 2) = P(x, y)$, $(y \geq 1) = Q(x, y)$, $(x < -1) = R(x, y)$, $(y < -2) = S(x, y)$:

$I = I_P \cap I_Q \cup I_R \cap I_S$. Область истинности заштрихована:



1. А) Навесить кванторы на одноместный предикат $P(x)$ и построить отрицание к предикату. В) Навесить кванторы на двуместный предикат $P(x, y)$ и построить отрицание к предикату.

А) Исходные данные: $P(x) = " \sin x = 0, x \in R "$

Решение $\overline{P(x)} = " \sin x \neq 0, x \in R "$

$\forall x P(x) a = " \forall x \in R \mid \sin x = 0 "; \hat{a} = 0$

$\exists x P(x) b = " \exists x \in R \mid \sin x = 0 "; \hat{b} = 1$

В) Исходные данные:

$P(x, y) = "x \text{ делится без остатка на } y, x, y \in R"$

Решение

$P(x, y) = "x \text{ не делится без остатка на } y; x, y \in R"$

$\forall x \forall y P(x, y) a = " \forall x \in R, \forall y \in R \mid x \text{ делится без остатка на } y "; \hat{a} = 0$

$\exists x \exists y P(x, y) c = " \exists x \in R, \exists y \in R \mid x \text{ делится без остатка на } y "; \hat{c} = 1$

$\forall x \exists y P(x, y) e = " \forall x \in R, \exists y \in R \mid x \text{ делится без остатка на } y "; \hat{e} = 1$

$\exists x \forall y P(x, y) g = " \exists x \in R, \forall y \in R \mid x \text{ делится без остатка на } y "; \hat{g} = 1$

Задание к работе:

1. Для следующих предложений выделить предикаты и для каждого из них указать область истинности, если область определения для одноместного $M=R$, для двухместного $M=R^2$:

- 1) $x+5=1$;
- 2) при $x=2$ выполняется равенство $x^2 - 1 = 0$;
- 3) существует такое число x , что $x^2 - 2x + 1 = 0$;
- 4) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
- 5) $x+2 < 3x - 4$;
- 6) однозначное число x кратно 3;
- 7) $(x+2)-(3x-4)$;
- 8) $x^2 + y^2 > 0$.

2. Какие из предикатов тождественно истинны?

- a. $x^2 + y^2 \geq 0$;
- b. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;
- c. $x^2 + 1 \geq (x+1)^2$;
- d. $x^2 + y^2 > 0$;
- e. $(x+1)^2 > x-1$.

3. Найти области истинности предикатов, если $x \in \mathbb{R}$:

1) $\sqrt{x-6} = 2$;

2) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$;

3) $\begin{cases} x^2 - 13x + 40 \geq 0; \\ 2x^2 + x - 30 < 0. \end{cases}$

4. Изобразить на декартовой плоскости области истинности предикатов:

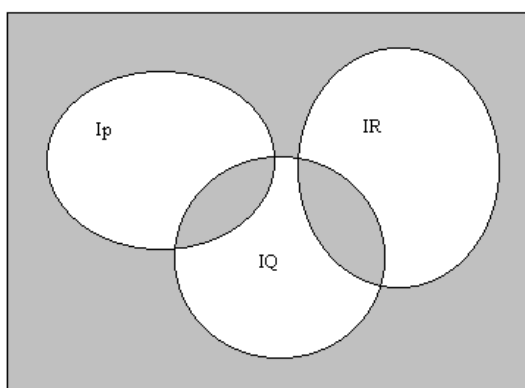
- 1) $x+y=1$;
- 2) $x+3y=3$;
- 3) $\sin x = \sin y$;
- 4) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 0$;
- 5) $(x-2)^2 + (y+3)^2 \leq 4$;
- 6) $((x>2) \vee (y>1)) \wedge ((x<-1) \vee (y<-2))$.

5. На множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ заданы предикаты $A(x)$: « x не делится на 5», $B(x)$: « x – четное число», $C(x)$: « x кратно 3». Найти множество истинности предиката: $A(x) \vee B(x) \rightarrow C(x)$.

6. Изобразить на диаграмме Эйлера -Венна область истинности предиката:

$$(P(x) \rightarrow Q(x)) \vee R(x) \wedge \overline{Q(x)}.$$

7. Записать предикат, полученный в результате логических операций над предикатами $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$:



9. Будут ли предикаты равносильны, или один является следствием другого?

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$;

2) $x + y = z$; $(x + y)(x - z) = -zy$;

3) $x^3 + y^3 = 0$; $x^2 - y^2 = 0$.

Контрольные вопросы.

1. Определение одноместного предиката.
2. Область истинности одноместного предиката.

3. Определение тождественно истинного (тождественно ложного) предиката.
4. Определение двухместного предиката.
5. Перечислить логические операции над предикатами и показать области истинности на диаграммах Эйлера-Венна.
6. Что такое и как обозначается квантор общности?
7. Что такое и как обозначается квантор существования?